

Zur Beobachtung radialsymmetrischer Radioquellen mit dem Michelson-Interferometer II

Von GERHARD ELWERT

Aus dem Astronomischen Institut der Universität Tübingen
(Z. Naturforsch. 11 a, 961—969 [1956]; eingegangen am 14. September 1956)

In dem vorliegenden 2. Teil der Untersuchung werden stetige Intensitätsverteilungen $T(r)$ scheibenförmiger und ringförmiger radialsymmetrischer Radioquellen betrachtet. Aus ihnen lassen sich Funktionen $T(r)$ aufbauen, die den theoretischen Verteilungen der Sonne im Radiofrequenzgebiet entsprechen. Für mehrere Modelle werden Abschätzungen der bei endlichem Maximalabstand N der Antennen entstehenden Fehler gegeben. Diese nehmen mit wachsendem N sehr viel rascher ab als bei den in I betrachteten Kastenmodellen.

Die bisherigen Bestimmungen der Intensitätsverteilung der Sonne mit dem MICHELSON-Interferometer werden diskutiert. Transformierte $A(n)$ vom Typ einer GAUSS-Funktion, wie sie aus älteren Messungen im m-Wellengebiet zu folgen scheinen, führen zu Funktionen $T(r)$ ebenfalls vom GAUSS-schen Typ und damit zu einem gegenüber der Theorie zu raschen Intensitätsabfall innerhalb der optisch sichtbaren Sonnenscheibe. Aus dem neuerdings bei 60 cm Wellenlänge und $N=240$ gefundenen Intensitätsminimum in der Mitte kann nicht auf die Existenz eines hellen Randes der Sonne geschlossen werden. Die seither verwendeten maximalen Entfernungen der Antennen sind zu seinem Nachweis nicht ausreichend.

Die vorliegende Untersuchung ist die Fortsetzung einer früheren Arbeit von SIEDENTOPF und dem Verfasser¹ über folgende Problemstellung. Es werde die Strahlung einer radialsymmetrischen kosmischen Radioquelle der Strahlungstemperatur $T(r)$ mit einem MICHELSON-Interferometer von variablem Antennenabstand nach dem RYLESchen Phasenumschaltverfahren empfangen. Man erhält dann experimentell die Amplitude

$$A(n) = 2\pi \int_0^\infty T(r) r J_0(2\pi n r) dr. \quad (1)$$

Hierin ist n der in Einheiten der Wellenlänge gemessene Antennenabstand; J_0 ist die BESSEL-Funktion nullter Ordnung. Mathematisch gibt $A(n)$ die FOURIER-BESSEL-Transformierte der Strahlungstemperatur $T(r)$. Da sich die Transformation umkehren läßt, gilt

$$T(r) = 2\pi \int_0^\infty A(n) n J_0(2\pi n r) dn. \quad (2)$$

Zu einer exakten Bestimmung von $T(r)$ wäre es erforderlich, $A(n)$ für alle Antennenabstände n zu messen. Dies ist aber unmöglich. Da $A(n)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt, ersetzt man $A(n)$ oberhalb des Maximalabstandes N durch 0. Dann erhält man statt (2) folgende Gl. (3):

$$T^*(r) = 2\pi \int_0^N A(n) J_0(2\pi n r) n dn. \quad (3)$$

Der Fehler ist also gegeben durch

$$\Delta T(r) = T(r) - T^*(r) = 2\pi \int_N^\infty A(n) J_0(2\pi n r) n dn. \quad (4)$$

Er ist von der wahren Intensitätsverteilung $T(r)$ und N abhängig.

In I wurden Modelle für $T(r)$ mit Bereichen konstanter Strahlungstemperatur betrachtet, nämlich

1. Scheibe konstanter Strahlungstemperatur (Kastenmodell der Scheibe)

$$T(r) = \begin{cases} T_S & \text{für } r \leq R; \\ 0 & \text{für } r > R. \end{cases}$$

2. Ring konstanter Strahlungstemperatur (Kastenmodell des Ringes)

$$T(r) = \begin{cases} T_R & \text{für } r_1 \leq r \leq r_2; \\ 0 & \text{für } 0 \leq r < r_1, r_2 < r. \end{cases}$$

3. Überlagerung von Scheibe und Ring mit $r_2 = R$.

Bei der numerischen Auswertung wurde der Fall der Sonne betrachtet. Dem Sonnenradius von $16'$ entspricht im Bogenmaß

$$R_\odot = 4,7 \cdot 10^{-3}. \quad (5)$$

¹ G. ELWERT u. H. SIEDENTOPF, Z. Naturforsch. 11 a, 769 [1956], im folgenden als I zitiert.



Ferner wurde zur Abkürzung

$$\alpha = 2\pi R, \quad \beta = 2\pi r \quad (6)$$

gesetzt. Für die Sonne ist

$$\alpha_{\odot} = 2\pi R_{\odot} = 2,95 \cdot 10^{-2}. \quad (7)$$

Die in I untersuchten Modelle sind insofern stark schematisiert, als an den Grenzen der Bereiche konstanter Strahlungsintensität Sprünge von $T(r)$ auftreten. Zu einer befriedigenden Darstellung solcher Intensitätsverläufe benötigt man natürlich $A(n)$ bis zu großen n ; es sind also große Maximalentfernungen N erforderlich. Die in der Natur vorkommenden Quellen werden jedoch eine stetige Intensitätsverteilung $T(r)$ besitzen. Zur Erzielung einer vorgegebenen Genauigkeit werden bei ihnen etwas kleinere Werte von N ausreichen. Aus diesem Grunde sollen in dem vorliegenden 2. Teil der Untersuchung stetige Funktionen $T(r)$ betrachtet werden.

I. Scheibe konstanter Strahlungstemperatur mit exponentiellem Intensitätsabfall

Man erhält bereits eine wesentliche Verbesserung des in I betrachteten Kastenmodells, wenn man zu der Scheibe konstanter Strahlungstemperatur am Rand einen exponentiellen Intensitätsabfall hinzufügt. Es werde also gesetzt

$$T_S(r) = T_S + T_S'(r), \quad (8)$$

wobei T_S' für $r > R$ gegeben sei durch

$$T_S'(r) = T_S \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot \exp\{-a(r/R - 1)\}. \quad (8')$$

In Abb. 1 sind Modelle für verschiedene Werte des Parameters a dargestellt. Bei der Berechnung der Transformaten $A(n)$ von $T_S'(r)$ kann die asymptotische Formel für J_0 nach I, Gl. (13) ver-

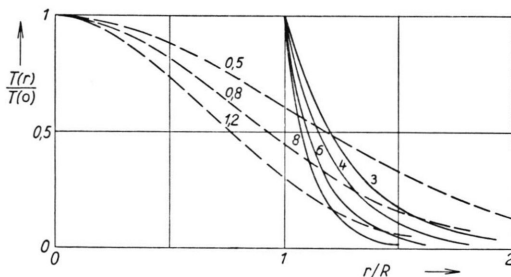


Abb. 1. Modelle der Scheibe. — Konstante Strahlungstemperatur mit exponentiellem Randabfall. Die angegebenen Zahlen bedeuten die Werte des Parameters a . --- GAUSS-Funktionen. Die Zahlen geben die Werte des Parameters b an.

wendet werden, da der Integrand nur in der Nähe von $r=R$ von Null verschieden ist. Schon von $n \approx 100$ an wird bei der Sonne $\alpha_{\odot} n > 3$, so daß die asymptotische Formel eine völlig ausreichende Näherung liefert. Dann erhält man

$$A(n) = \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} T(r) \sqrt{r} \cos\left(\beta n - \frac{\pi}{4}\right) dr. \quad (1')$$

Mit (8') ergibt sich

$$A_S'(n) = T_S \cdot 2 \sqrt{\frac{R}{n}} \frac{R}{(\alpha n)^2 + a^2} \cdot \left[a \cos\left(\alpha n - \frac{\pi}{4}\right) - \alpha n \sin\left(\alpha n - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (9)$$

Addiert man $A_S'(n)$ zu der aus I, Gl. (11) zu entnehmenden asymptotischen Formel für die Transformierte T_S , so ergibt sich

$$A(n) = T_S \sqrt{\frac{R}{n}} \frac{a R}{(\alpha n)^2 + a^2} \cdot \left[2 \cos\left(\alpha n - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2a}{\alpha n} \sin\left(\alpha n - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (10)$$

Es soll nun untersucht werden, welcher Fehler $\Delta T(r)$ der Strahlungstemperatur entsteht, wenn $A(n)$ bei $n=N$ abgeschnitten und für $n > N$ durch Null ersetzt wird. Da a bei den in Abb. 1 betrachteten Modellen zwischen 8 und 3 liegt, kann a^2 in dem interessierenden Bereich von $n > N \approx 800$ bzw. 300 in ausreichender Näherung gegen $(\alpha_{\odot} n)^2$ vernachlässigt werden.

Wir untersuchen zunächst die Mitte der Scheibe.

1. Mitte der Scheibe

Nach Formel (4) und (10) ergibt sich unter den angegebenen Voraussetzungen

$$\Delta T(0) = T_S \frac{a}{2\pi \sqrt{R}} \int_N^{\infty} n^{-3/2} \cdot \left[2 \cos\left(\alpha n - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2a}{\alpha n} \sin\left(\alpha n - \frac{\pi}{4}\right) \right] dn. \quad (11)$$

Durch fortgesetzte partielle Integration kann man den Exponenten von n dauernd erniedrigen und eine Reihe erhalten, die nach negativen Potenzen von N fortschreitet. Da $\alpha N \gg 1$ ist, kann man nach dem 1. Glied abbrehen und erhält

$$\Delta T(0) = T_S \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{(\alpha N)^{3/2}} \cdot \left[\sin\left(\alpha N - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{a}{\alpha N} \cos\left(\alpha N - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (12a)$$

Es gilt also unter der Voraussetzung $a^2 \ll (\alpha N)^2$

$$|\Delta T(0)| \leq T_S \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{(\alpha N)^{3/2}} = |\Delta T_e(0)|. \quad (12b)$$

Die Fehlergrenzen sind in Abb. 2 für $R=R_\odot$ und $a=3$ bzw. 6 dargestellt (Kurven I). In dieselbe Abb. sind sie für das Kastenmodell nach I,

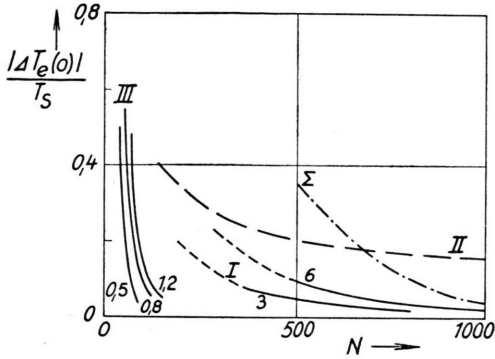


Abb. 2. Abschätzung des Fehlers der Scheibe in der Sonnenmitte. I: Scheibe mit exponentiellem Randabfall, $a=3$ und 6; II: Kastenmodell; III: GAUSS-Modell. Die Zahlen bedeuten den Parameter b . — — — Überlagerung von Kurve I für $a=6$ und Kurve I in Abb. 5 mit halbiertem Ordinate.

Gl. (26) eingetragen (Kurve II). Der Vergleich zeigt, wieviel rascher die Kurven I mit wachsendem N abfallen als Kurve II. Selbst für den steilen Abfall von $T(r)$, den man bei dem Parameter $a=6$ erhält, sind die Fehler beim Modell mit exponentiellem Randabfall schon von etwa $N=300$ an beträchtlich kleiner als beim Kastenmodell.

2. Randnahe Gebiete

Verwendet man in Gl. (4) die asymptotische Formel für J_0 , so ergibt sich für die randnahen Gebiete der Fehler

$$\Delta T(r) = \frac{2}{\sqrt{r}} \int_N^\infty A(n) \sqrt{n} \cos\left(\beta n - \frac{\pi}{4}\right) dn. \quad (13)$$

Indem man Gl. (10) benützt und das zweite Glied gegenüber dem ersten vernachlässigt, erhält man

$$\Delta T(r) = T_S \frac{a}{\pi \alpha} \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot \int_N^\infty \frac{1}{n^2} [\cos(n\alpha - n\beta) + \sin(n\alpha + n\beta)] dn. \quad (14)$$

Durch partielle Integration könnte man wieder eine nach $1/n$ fortschreitende Reihe gewinnen. Bricht

man nach dem 1. Glied ab, so findet man

$$\Delta T(r) = T_S \frac{a}{\pi \alpha} \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{1}{N} \cdot \left\{ \frac{1}{N(\alpha - \beta)} \sin(N\beta - N\alpha) + \frac{1}{N(\beta + \alpha)} \cos(N\beta + N\alpha) \right\}. \quad (15)$$

Mit dem ersten Glied ergibt sich somit die Abschätzung

$$|\Delta T(r)| \leq T_S \frac{2}{\pi} \frac{a}{(\alpha N)^2} f\left(\frac{r}{R}\right) = |\Delta T_e(r)|, \quad (16)$$

wobei

$$f(r/R) = \begin{cases} \frac{\sqrt{R/r}}{1 - (r/R)^2} & \text{wenn } R - r > 0, \\ \frac{\sqrt{r/R}}{(r/R)^2 - 1} & \text{wenn } R - r < 0. \end{cases} \quad (16')$$

Die Fehlergrenzen sind aus Abb. 3 für $R=R_\odot$ und verschiedene Werte von r/R_\odot zu ersehen. Dabei ist $a=6$ gewählt; da die Fehler proportional zu a sind, lassen sich die entsprechenden Angaben aus der Abbildung auch für andere Werte dieses Parameters entnehmen.

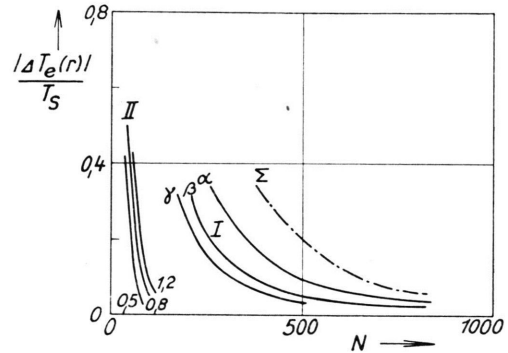


Abb. 3. Abschätzung des Fehlers der Scheibe in randnahen Gebieten. I: Scheibe mit exponentiellem Randabfall und $a=6$; $r/R_\odot=0,9$ oder $1,09$ (Kurve α), $r/R_\odot=0,8$ oder $1,17$ (Kurve β), $r/R_\odot=0,7$ oder $1,2$ (Kurve γ). II: GAUSS-Modell mit $b=0,5, 0,8$ und $1,2$. Σ : Überlagerung von Kurve I β und Kurve α der Abb. 6 a mit halbiertem Ordinate.

II. Darstellung der Sonnenscheibe durch eine Gauß-Funktion

Als Gegenstück zum Kastenmodell werde noch ein besonders glatter Abfall einer gegebenen Zentralintensität einer Scheibe auf Null betrachtet. Er ist gegeben durch eine GAUSS-Funktion. Bei ihr ist ein besonders enges Spektrum zu erwarten. Es gelte

$$T(r) = T_0 e^{-p^2 r^2} = T_0 e^{-b(r/R)^2}, \quad (17)$$

wobei als Parameter b oder $p^2 = b/R^2$ eingeführt ist. Kurven für verschiedene Werte des Parameters b sind ebenfalls in Abb. 1 eingetragen. Das Integral (1) läßt sich exakt ausführen und ergibt

$$A(n) = T_0 \frac{\pi R^2}{b} e^{-(\pi n)^2/4b}. \quad (18)$$

Die Transformierte ist also wie bei der LAPLACE-Transformation wieder eine GAUSS-Funktion. Infolgedessen hat $A(n)$ keine Nullstelle. Der rasche Abfall des Spektrums erfolgt etwa bei dem Wert von n , für den der Exponent 2 wird, d. h. bei

$$n \approx \frac{2\sqrt{2b}}{\alpha} = \frac{\sqrt{2b}}{\pi R}. \quad (19)$$

Mit $b=0,5$ ergibt sich für die Sonne $n \approx 70$. Bei dem betrachteten Modell ist infolgedessen schon für sehr kleine Maximalentfernungen N ein kleiner Fehler zu erwarten. Er soll nun untersucht werden.

1. Mitte der Sonne

Nach (4) ergibt sich sofort

$$\Delta T(0) = T_0 e^{-(N\alpha)^2/4b}. \quad (20)$$

Der Fehler ist für $b=0,5, 0,8$ und $1,2$ ebenfalls in Abb. 2 eingetragen. Er wird mit wachsender Maximalentfernung N sehr viel rascher klein als bei den vorher betrachteten Modellen; die Abb. läßt die Sonderstellung der GAUSS-Funktion deutlich erkennen. Bei $N=100$ wird der Fehler der Mittelpunktsintensität schon kleiner als 10%.

2. Randnahe Gebiete

Ersetzt man in Gl. (13) den \cos durch 1, so findet man mit (17) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\Delta T| &< T_0 \frac{2\pi}{p^2} \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{N}} \int_N^\infty e^{-\pi^2 n^2/p^2} n \, dn \\ &= T_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{N} \beta} e^{-(N\alpha)^2/4b} = |\Delta T_e(r)|. \end{aligned} \quad (21)$$

Da die Exponentialfunktionen in den Gln. (17) und (21) analog gebaut sind, erfolgt der rasche Abfall von ΔT bei Werten N , die durch Gl. (19) gegeben sind. Der Fehler ist also etwa von derselben Größenordnung wie in der Mitte der Sonne, da $\sqrt{N} \alpha_\odot$ bei diesen Werten von N nach Gl. (7) nicht sehr von 1 verschieden ist. Zum Vergleich mit dem in Abschn. I betrachteten Modell sind die Fehlerschranken in Abb. 3 eingetragen. Sie zeigt wieder die Sonderstellung der GAUSSschen Intensitätsverteilung.

III. Darstellung des hellen Ringes durch eine Gauß-Funktion

Bei der Berechnung der Transformierten $A(n)$ kann wieder Formel (1') verwendet werden. Eine geschlossene Integration ist möglich, wenn

$$T(r) = T_R \sqrt{\frac{R}{r}} e^{-q(r-r_0)^2} = T_R \sqrt{\frac{R}{r}} e^{-c(r/r_0-1)^2} \quad (22)$$

gesetzt wird. Dabei ist als Parameter q oder $c = q r_0^2$ eingeführt. Diese Funktion ist in Abb. 4 in der Umgebung von $r=r_0$ für $r_0=R$ dargestellt. Man erhält Intensitätsverläufe einer bei der späteren Anwendung auf den hellen Rand der Sonne interessierenden Breite und Lage, wenn man für den Parameter c etwa die Werte 50 und 100 wählt. Für eine weitere spätere Anwendung ist noch eine Kurve für $c=5,5$ und $r_0=0,7R$ gezeichnet.

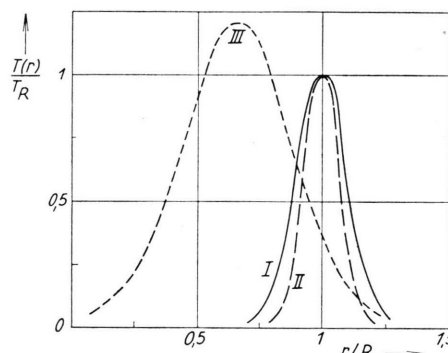


Abb. 4. GAUSS-Ring. I: $c=50, r_0=R$; II: $c=100, r_0=R$; III: $c=5,5, r_0=0,7R$.

Allerdings führt die Funktion (22) zu einer Unendlichkeitsstelle bei $r=0$. Man bricht sie deshalb zweckmäßigerweise an einer dem Nullpunkt sehr benachbarten Stelle $r = \varepsilon r_0 \ll r_0$ ab und ersetzt sie für $0 \leq r < \varepsilon r_0$ durch 0. Das Spektrum der so erhaltenen Funktion weicht natürlich von $A(n)$ nach (1) und (22) ab. Es ist jedoch leicht einzusehen, daß diese Abweichung geringfügig ist. In dem Gebiet $0 \leq r < \varepsilon r_0$ gilt nämlich für $T(r)$ nach (22) die Abschätzung

$$T(r) < T_R \sqrt{\frac{R}{r}} e^{-c(\varepsilon-1)^2}. \quad (23)$$

Da die Exponentialfunktion sehr kleine Werte annimmt, wird auch $T(r)$ bis auf eine äußerst enge Umgebung von $r=0$ sehr klein. Infolgedessen liefert das abgeschnittene Gebiet nur einen minimalen Beitrag $A'(n)$ zu $A(n)$. Ersetzt man in Gl. (1) die BESSEL-Funktion durch 1, so ergibt sich für $r_0=R$

$$A'(n) < T_R \frac{4\pi}{3} R^2 e^{-c(\varepsilon-1)^2} \varepsilon^{3/2}. \quad (24)$$

Wenn man etwa $\varepsilon=10^{-3}$ wählt, so findet man für die beiden letzten Faktoren den Wert 10^{-48} bei $c=10^2$ bzw. 10^{-7} bei $c=5,5$. $A'(n)$ kann also mit hoher Genauigkeit gegenüber $A(n)$ nach Gl. (1') und (22) vernachlässigt werden. Die Integration über r kann also wie in (1') bei $r=0$ beginnen. Der Beitrag, den das betrachtete Intervall zu $A(n)$ liefert, wird erst wichtig bei sehr großem n , die zum spektralen Aufbau der Zacke bei $r=0$ nötig sind.

Setzt man $T(r)$ in (1') ein, so folgt

$$A(n) = T_R \sqrt{\frac{R}{n}} \cdot \left\{ e^{-i\pi/4} \int_0^\infty e^{-q(r-r_0)^2} e^{+2\pi i n r} dr + \text{conj} \right\}. \quad (25)$$

Da der Integrand für $r < 0$ sehr klein wird, kann die untere Integrationsgrenze 0 durch $-\infty$ ersetzt werden. Dann wird

$$A(n) = T_R 2r_0 \sqrt{\frac{\pi R}{cn}} e^{-(\gamma n)^2/4c} \cos\left(\gamma n - \frac{\pi}{4}\right). \quad (26)$$

$$\text{Hierin ist} \quad \gamma = 2\pi r_0. \quad (27)$$

Es folgt wie in II, daß die Transformierte stark abfällt, wenn die Exponentialfunktion etwa den Wert e^{-2} annimmt. Der entsprechende Antennenabstand ist

$$n = \frac{2\sqrt{2c}}{\gamma} = \frac{\sqrt{2c}}{\pi r_0}. \quad (28)$$

Hieraus ergibt sich für $c=100$ und $r_0=R_\odot$ $n \approx 700$, da c etwa 100-mal größer ist als b in Gl. (19).

Wir führen nun wieder die Fehlerabschätzung durch.

1. Mitte der Scheibe

Mit der Spektralfunktion (26) wird

$$\Delta T(0) = T_R \gamma \sqrt{\frac{2a}{c}} \cdot \int_N^\infty \sqrt{n} e^{-(\gamma n)^2/4c} \cos\left(\gamma n - \frac{\pi}{4}\right) dn. \quad (29)$$

Faßt man die beiden ersten Glieder im Integranden zu einem Faktor zusammen und integriert partiell, so ergibt sich für das Integral

$$\int_N^\infty \dots dn = J_1 + J_2 = \frac{-\sqrt{N}}{\gamma} e^{-(\gamma N)^2/4c} \sin\left(\gamma N - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \int_N^\infty \sqrt{n} e^{-(\gamma n)^2/4c} \left[\frac{(\gamma n)^2}{c} - 1 \right] \frac{1}{\gamma n} \sin\left(\gamma n - \frac{\pi}{4}\right) dn.$$

J_1 und J_2 kann man abschätzen, indem man den Betrag des sin durch seinen Maximalwert 1 ersetzt. Es wird dann unter der Voraussetzung $(\gamma n)^2 > c$

$$|J_2| < \frac{1}{\gamma \sqrt{N}} \left\{ N e^{-(\gamma N)^2/4c} + \frac{1}{4r_0} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma N}{2\sqrt{c}}\right) \right] \right\}. \quad (30)$$

Hierin ist Φ das Fehlerintegral. Damit wird

$$\frac{|\Delta T(0)|}{T_R} < 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{\alpha N}{c}} e^{-(\gamma N)^2/4c} + \frac{R}{r_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha N}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma N}{2\sqrt{c}}\right) \right] = \frac{|\Delta T_e(0)|}{T_R}. \quad (31)$$

Die aus dieser Abschätzung folgenden Kurven für die oberen Schranken des Fehlerbetrages sind für $c=50$, 100 und $r_0=R=R_\odot$ sowie $r=5,5$ und $r_0=0,7R_\odot$ in Abb. 5 dargestellt. In dieselbe Abb. ist auch die Fehlerabschätzung für das Kastenmodell des hellen Randes für $r_1=R_\odot$, $r_2=0,8R_\odot$ nach I, Gl. (30), eingetragen. Der Fehler wird bei der geglätteten Intensitätsverteilung des GAUSS-Ringes mit wachsendem N wieder sehr viel rascher klein als beim Kastenmodell des Ringes. Qualitativ bleibt das Ergebnis von I, Abschnitt I, 4, jedoch erhalten: Der helle Rand täuscht im Mittelpunkt eine Intensität vor, die sogar beträchtlich sein kann. Bei den untersuchten Modellen ist man nach Abschätzung (31) bei

$c=50$ erst von $N \approx 850$ und $c=100$ von $N \approx 1150$ an sicher, daß der Fehler in der Mitte kleiner als

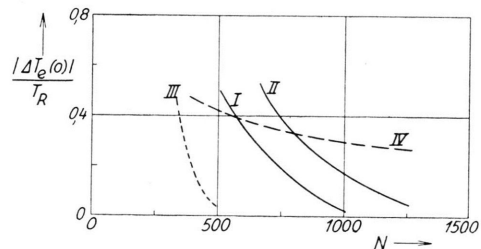


Abb. 5. Fehlerabschätzung des Ringes in der Mitte. I und II: GAUSS-Ring nach Abb. 4, Kurve I bzw. II; III: breiter GAUSS-Ring nach Abb. 4, Kurve III; IV: Kastenring nach I, Gl. (30), mit $r_1=R_\odot$, $r_2=0,8R_\odot$.

10% der maximalen Strahlungstemperatur des Ringes ist. Der Vergleich mit der Scheibe zeigt nach Abb. 2, daß er bei den Modellen des Abschnitts I mit $a=3$ bzw. 6 schon bei $N \approx 300$ bzw. 500 kleiner als 10% der Intensität der Scheibenmitte wird. Bei der GAUSSschen Intensitätsverteilung der Scheibe genügen bei $b \leq 0,8$ sogar Werte von $N \leq 100$.

2. Randnahe Gebiete

Mit der Transformierten (26) folgt aus Gl. (13) der Fehler

$$\Delta T(r) = T_R 4 r_0 \sqrt{\frac{\pi R}{r c}} \cdot \int_N^\infty e^{-(\gamma n)^{2/4c}} \cos\left(\beta n - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\gamma n - \frac{\pi}{4}\right) dn. \quad (32)$$

Eine Grobabschätzung ist leicht zu erhalten, indem man den Betrag des Produktes der cos im Integranden durch den Maximalwert 1 ersetzt. Man erhält dann

$$|\Delta T(r)| < T_R 2 \sqrt{\frac{R}{r}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma N}{2\sqrt{c}}\right) \right] = |\Delta T_e(r)|. \quad (33)$$

Die Abschätzung kann verfeinert werden, wenn man von der Darstellung

$$\Delta T(r) = T_R 2 r_0 \sqrt{\frac{\pi R}{r c}} (C + S) \quad (34)$$

$$\text{mit } \begin{cases} C \\ S \end{cases} = \int_N^\infty e^{-(\gamma n)^{2/4c}} \frac{\cos(\beta n - \gamma n)}{\sin(\beta n + \gamma n)} dn \quad (35)$$

ausgeht. Man findet dann zunächst für beliebige Werte von r

$$|C| \leq \frac{\sqrt{\pi c}}{\gamma} \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma N}{2\sqrt{c}}\right) \right]. \quad (36)$$

Das Gleichheitszeichen gilt für die Stelle $r = r_0$. Unter der Voraussetzung $r \neq r_0$ erhält man eine schärfere Abschätzung durch partielle Integration. Dann wird

$$C = -e^{-(\gamma N)^{2/4c}} \frac{\sin(\gamma N - \beta N)}{\gamma - \beta} + \int_N^\infty \frac{\sin(n\gamma - n\beta)}{\gamma - \beta} e^{-(\gamma n)^{2/4c}} d\frac{(n\gamma)^2}{4c} = C_1 + C_2. \quad (37)$$

Es gilt für C_1 wie für C_2

$$|C_{1,2}| < \frac{1}{|\gamma - \beta|} e^{-(\gamma N)^{2/4c}},$$

$$\text{so daß } |C| < \frac{2}{|\gamma - \beta|} e^{-(\gamma N)^{2/4c}} \text{ wird.} \quad (38)$$

Entsprechend findet man

$$|S| < \frac{2}{\gamma + \beta} e^{-(\gamma N)^{2/4c}}. \quad (39)$$

Mit (34), (38) und (39) ergibt sich

$$\frac{|\Delta T(r)|}{T_R} \sqrt{\frac{r}{R}} < \frac{1}{\sqrt{\pi c}} e^{-(\gamma N)^{2/4c}} f(r/r_0) = \frac{|\Delta T_e(r)|}{T_R} \sqrt{\frac{r}{R}}, \quad (40)$$

$$\text{wobei } f(r/r_0) = \begin{cases} \frac{4}{1 - (r/r_0)^2} & \text{für } r_0 > r, \\ \frac{4}{(r_0/r) - (r/r_0)} & \text{für } r_0 < r. \end{cases}$$

An der Stelle $r = r_0$ gilt

$$\frac{|\Delta T(r_0)|}{T_R} \sqrt{\frac{r_0}{R}} < 1 - \Phi\left(\frac{\gamma N}{2\sqrt{c}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi c}} e^{-(\gamma N)^{2/4c}} = \frac{|\Delta T_e(r_0)|}{T_R} \sqrt{\frac{r_0}{R}}. \quad (41)$$

Aus Abb. 6a und 6b ist das Ergebnis der Fehlerabschätzung in der Nähe des Randes für $c=50$ bzw. 100 und $r_0 = R = R_\odot$ zu entnehmen. Die Grobabschätzung nach Gl. (33) ist gestrichelt gezeichnet.

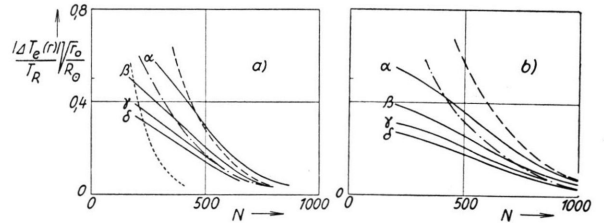


Abb. 6. Fehlerabschätzung des Ringes in randnahen Gebieten. a) $c=50$ nach Abb. 4, Kurve I; b) $c=100$ nach Abb. 4, Kurve II. ——— Grobabschätzung; - - - - - $r/r_0=1$; $r/r_0=0,8$ und $1,2$ (Kurve α), $r/r_0=0,7$ und $1,28$ (Kurve β), $r/r_0=0,6$ und $1,36$ (Kurve γ), $r/r_0=0,5$ und $1,45$ (Kurve δ). - - - - - $c=5,5$ nach Abb. 4, Kurve III.

Die ausgezogenen Kurven sind nach (29) für verschiedene Werte von r/r_0 berechnet. Der Vergleich mit Abb. 5 zeigt, daß die Werte von N , bei denen der Fehler in den randnahen Gebieten etwa unterhalb von 10% der maximalen Intensität des Ringes bleibt, kleiner sind als im Mittelpunkt des Ringes. In Abb. 6a ist außerdem noch die Grobabschätzung für $c=5,5$, $r_0=0,7 R_\odot$ eingetragen.

IV. Diskussion der bisherigen Bestimmungen der Intensitätsverteilung der Sonne

Schon vor mehreren Jahren ermöglichte die Theorie der thermischen Radiostrahlung die Berechnung

der Intensitätsverteilung der Sonnenkorona im Radiofrequenzgebiet. Einige charakteristische Ergebnisse sind in Abb. 7 nach SMERD² und REULE³ zusammengestellt. Bei 2 m Wellenlänge setzt der Intensitätsabfall erst außerhalb der optisch sichtbaren Sonnenscheibe ein. Bei längeren Wellen wird die Radiosonne noch größer, da die Ausdehnung des Gebietes, in dem die Korona optisch dick wird, mit der Wellenlänge wächst. Bei dm-Wellen und noch

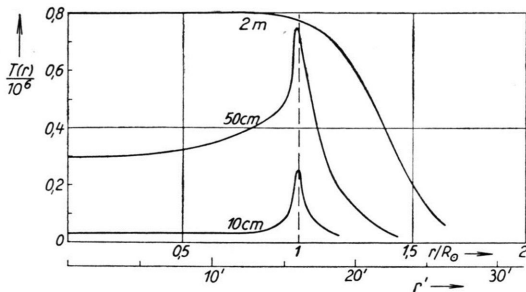


Abb. 7. Theoretische Intensitätsverteilung der Sonne im Radiofrequenzgebiet bei verschiedenen Wellenlängen. Abszisse: Abstand von der Sonnenmitte in Einheiten des Sonnenradius bzw. in Bogenminuten. Ordinate: $T(r)$ in Einheiten von $10^6 \text{ }^\circ \text{K}$.

mehr bei cm-Wellen wird die Korona optisch dünn. Die Äquivalenttemperatur ist kleiner und wird proportional zur optischen Tiefe des Sehstrahls. Den längsten Sehstrahl erhält man, wenn man am Rand der Sonne vorbeisieht. Deshalb ergibt die Theorie einen hellen Ring am Sonnenrand.

Es ist mehrfach versucht worden, die Intensitätsverteilung der Radiosonne mit MICHELSON-Interferometern experimentell zu ermitteln. Es gelang jedoch mit dieser Anordnung nicht, den hellen Rand nachzuweisen. Erst vor wenigen Jahren konnten CHRISTIANSEN und WARBURTON⁴ die eindimensionale Intensitätsverteilung bei einer Wellenlänge von 21 cm mit einem aus 32 Parabolspiegeln bestehenden Gitterinterferometer hoher Auflösung messen. Die Spiegel waren über eine Strecke von etwa 210 m in gleichen Abständen verteilt. Diese Strecke entspricht bei den verwendeten Wellenlängen einer Basislänge von $N=1000$. Nach der bekannten Formel für das Auflösungsvermögen eines Fernrohres ergibt sich damit ein kleinster trennbarer Winkelabstand von ungefähr $4'$. Mit dieser Anordnung konnte der helle

Rand gefunden werden. Hingegen hatten die Beobachtungen mit dem MICHELSON-Interferometer keine befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie ergeben. STANIER⁵ fand bei 60 cm-Wellenlänge keinen hellen Rand. Auch die Beobachtungen, die MACHIN⁶ und O'BRIEN⁷ im Meterwellengebiet durchführten, zeigten Abweichungen von der Theorie.

In Abb. 8a ist die Meßkurve für die transformierte $A(n)$ bei 3,7 m Wellenlänge nach O'BRIEN wiedergegeben (Kurve I). $A(n)$ wird etwa bei der Antennenentfernung $n=100$ sehr klein. Ersetzt man A für größere Werte von n durch 0, so erhält man für $T(r)$ nach Gl. (3) die in Abb. 8 dargestellte Kurve.

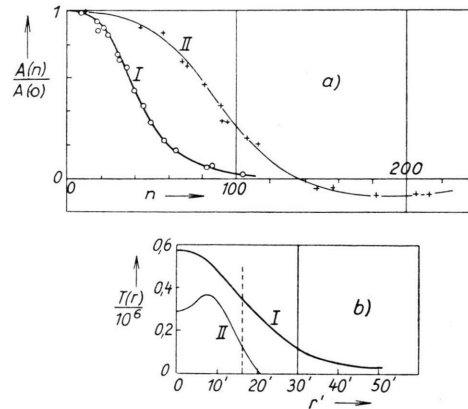


Abb. 8. a) Transformierte $A(n)$; I: $\lambda = 3,7 \text{ m}$ nach O'BRIEN, II: $\lambda = 60 \text{ cm}$ nach O'BRIEN und TANDBERG-HANSEN. b) Hieraus abgeleitete Strahlungstemperatur $T(r)$; I: $\lambda = 3,7 \text{ m}$, II: $\lambda = 60 \text{ cm}$.

Im Gegensatz zu den Voraussagen der Theorie bleibt die Strahlungsintensität mit wachsendem r von der Mitte an zunächst nicht konstant; schon ein erheblicher Intensitätsabfall beginnt innerhalb der optisch sichtbaren Sonnenscheibe. Dieses Ergebnis ist auf Grund der Erörterungen in Abschnitt II sofort zu verstehen. Die verwendete Funktion $A(n)$ hat den Charakter einer GAUSS-Funktion. Damit ergibt sich auch für $T(r)$ ein Funktionsverlauf vom Typ einer GAUSS-Funktion. Nach Abb. 8a ist $A(n)$ etwa für $n_0=45$ auf den e -ten Teil des Maximalwerts abgesunken. Nach (18) und (7) ist also $b = \frac{1}{4}(n_0 \alpha_\odot)^2 \approx 0,42$. Somit erreicht $T(r)$ nach (17) $1/e$ des Maximalwerts bei $r/R_\odot = 1/\sqrt{0,42} = 1,5$,

² S. F. SMERD, Aust. J. Sci. Res. A **3**, 34 [1950].

³ A. REULE, Z. Naturforschg. **7a**, 234 [1952].

⁴ W. N. CHRISTIANSEN u. J. A. WARBURTON, Aust. J. Phys. **6**, 190, 262 [1953].

⁵ H. M. STANIER, Nature, Lond. **165**, 354 [1950].

⁶ K. H. MACHIN, Nature, Lond. **167**, 889 [1951].

⁷ P. A. O'BRIEN, Month. Not. Roy. Soc., Lond. A **112**, 351 [1952].

entsprechend einem Abstand von $24'$. Dieser Wert stimmt mit dem aus Abb. 8b zu entnehmenden praktisch überein. Ähnliche Kurven für $A(n)$ und damit auch $T(r)$ ergeben sich nach O'BRIEN auch bei 1,4 und 7,9 m Wellenlänge. Der Intensitätsabfall setzt bei 1,4 m ebenfalls zu weit innen ein. Ob dieses Ergebnis reell ist, kann jedoch erst entschieden werden, wenn sich bei Messungen der Amplitude $A(n)$ bei $n > 100$ nicht Abweichungen von einer GAUSS-Funktion ergeben.

Die letzten Cambridger Messungen von O'BRIEN und TANDBERG-HANSEN⁸ bei 60 cm Wellenlänge reichen bis zu einer Maximalentfernung von 240 Wellenlängen. Sie zeigen, daß der Betrag von $A(n)$ nach einer Nullstelle wieder ansteigt. Dieses Ergebnis gilt auch, wenn man das Interferometer dreht und damit den Winkel φ zwischen seiner Symmetrieebene und der Rotationsachse der Sonne ändert. Aus den Abweichungen, die $A(n)$ dabei erfährt, ist zu schließen, daß die Intensitätsverteilung von der Kreissymmetrie abweicht. Eine der Meßkurven ist ebenfalls in Abb. 8a eingetragen (Kurve II). Die aus ihr resultierende Kurve für T ist aus Abb. 8b zu ersehen und hat ein Minimum in der Mitte. Dieses Ergebnis wurde bei allen Werten von φ erhalten. In dem anschließenden Maximum glauben die Autoren den hellen Rand gefunden zu haben. Es liegt allerdings zu weit innen und ist zu breit. Die aus den Messungen abgeleitete Kurve ist aber vom Typ der in I, Abb. 2, wiedergegebenen Kurve $T^*(r)$ für $N=240$. Bei ihr wurde von dem Kastenmodell der Scheibe ausgegangen (Modell I). Dem von den genannten Autoren gefundenen Intensitätsanstieg braucht also kein heller Rand der wahren Intensitätsverteilung zu entsprechen. Fügt man einen hellen Ring hinzu, so erhält man nach I, Abschnitt II, 3, bei $N=240$ keine wesentliche Änderung von $T^*(r)$. Wie in I hervorgehoben wurde, ist bei dieser Maximalentfernung N noch keine Aussage über seine Existenz möglich.

Ein gegenüber dem Kastenmodell verbessertes Modell der Radiosonne im dm-Gebiet erhält man, wenn man einer Scheibe mit exponentiellem Randabfall (etwa mit $a=6$, Kurve A in Abb. 9) einen GAUSS-Ring überlagert. Wählt man $T_R = \frac{1}{2} T_S$, so erhält man mit $c=50$ Kurve B und durch Überlagerung das in Abb. 9 dargestellte Modell IIa. Eine Fehlerabschätzung kann man für dieses Modell ge-

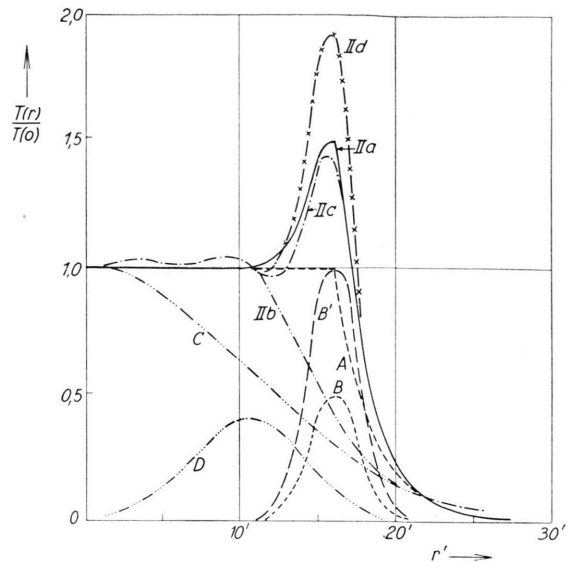


Abb. 9. Modelle der Strahlungstemperatur der Sonne. A: nach Abb. 1 mit $a=6$; B: GAUSS-Rand nach Abb. 4, Kurve I mit halbiertem Ordinate; IIa: Summenkurve A+B; B': wie B mit voller Ordinate; C: GAUSS-Funktion der Scheibe nach Abb. 1 mit $b=1,2$; D: GAUSS-Ring nach Abb. 4, Kurve III mit $T_R = \frac{1}{2} T_0$; IIb: Summenkurve C+D; IIc: Summenkurve IIb+B'; IId: Summenkurve IIc+B.

winnen, indem man die Kurven für die oberen Schranken der Beträge der Einzelfehler addiert. Bezieht man die Abschätzung des Gesamtfehlers auf die Strahlungstemperatur der Sonnenmitte, so hat man die Ordinaten in den Abb. 5 und 6a zu halbieren. Solche Summenkurven Σ sind in Abb. 2 mit $a=6$ für die Sonnenmitte und in Abb. 3 für die Nähe des Randes ($r/r_0=0,8$ und $1,2$) eingetragen; die Ordinaten der ersten Summenkurve sind größer als die der zweiten. Nach Abb. 2 wird der Fehler kleiner als 10% der Strahlungstemperatur der Sonnenmitte für $N \approx 800$, kleiner als 5% für $N \approx 1000$.

Das betrachtete Modell hat noch den Nachteil, daß der Differentialquotient von $T(r)$ für $r=R_\odot$ unstetig ist. Dies kann man vermeiden, wenn man ein Modell aus GAUSS-Funktionen allein aufbaut. Indem man zu der GAUSS-Funktion für die Scheibe nach Abb. 1 mit $b=1,2$ (Kurve C) noch den breiten GAUSS-Ring nach Abb. 4, Kurve III, mit $R=R_\odot$ und $T_R = \frac{1}{2} T_0$ addiert (Kurve D), erhält man zunächst die in Abb. 9 eingetragene Summenkurve IIb, welche der theoretischen Intensitätsverteilung bei etwa 1 m Wellenlänge entspricht. Ihre Transformierte besteht also aus einer Überlagerung einer rasch abfallenden GAUSS-Funktion nach Gl. (18) mit einer Schwingung, die nach Gl. (26) mit einer weni-

⁸ P. A. O'BRIEN u. E. TANDBERG-HANSEN, The Observatory 75, 11 [1955].

ger rasch abnehmenden GAUSS-Funktion moduliert ist. Um aus II b ein Modell mit einem hellen Rand zu erhalten, das dem soeben betrachteten Modell II a sehr ähnlich ist, muß man noch eine GAUSS-Funktion nach Kurve B' mit $T_R = T_0$ addieren (Modell II c). Außerdem ist in Abb. 9 ein Modell II d mit einem helleren Ring ($T_r = \frac{3}{2} T_0$) eingetragen. Die Fehlerabschätzung nach Abb. 2 und 5 für die Sonnenmitte bzw. Abb. 3 und 6 a für randnahe Gebiete zeigt, daß der Fehler beim Modell II b infolge der raschen Abnahme der Fehler für die GAUSS-Funktion C durch den Beitrag der Kurve D allein gegeben ist. Er wird kleiner als 10% der Mittelpunktintensität, wenn $|\Delta T|/T_R < 0,3$ wird, d. h. nach Abb. 5 von etwa $N = 350$ an. Bei den Modellen II c und II d mit hellem Rand ist der Fehler hingegen nach Abb. 5 und 6 a durch diesen allein bestimmt. Beim Modell

II c wird er für eine Maximalentfernung $N = 850$ bzw. 950 in der Mitte der Sonne kleiner als 10% bzw. 5% der Intensität in der Mitte. Die entsprechenden Werte von N sind beim Modell II d etwa 900 bzw. 1000. Bei Modell II c stimmen sie mit den beim Modell II a erhaltenen praktisch überein. Doch hat der Aufbau der Modelle II c und II d aus GAUSS-Funktionen den Vorteil, daß direkt zu übersehen ist, welche der dabei verwendeten Teilfunktionen den Wert von N bestimmen.

Zusammenfassend ist zu folgern, daß die bisherigen Messungen mit MICHELSON-Interferometern nur ein grobes Bild der Intensitätsverteilung der Sonne geben und insbesondere im dm-Wellengebiet zu wenig Informationen über ihre genauere Struktur liefern.

Die Versetzung als elementare Eigenspannungsquelle*

Von EKKEHART KRÖNER

Aus dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule
und dem Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart
(Z. Naturforschg. 11 a, 969—985 [1956]; eingegangen am 7. September 1956)

Es wird die Stellung der Theorie der Eigenspannungen innerhalb der Kontinuumsmechanik des Festkörpers besprochen (Einleitung und Ziff. 1). Alle Eigenspannungsquellen lassen sich auf eine elementare Eigenspannungsquelle zurückführen, die Versetzung. Dabei hat man dem Begriff der Versetzung einen allgemeineren Sinn zu geben, als dies gewöhnlich in der Kristallphysik geschieht. Die geometrische Grundgleichung der Kontinuumsmechanik des Festkörpers (Rot $\epsilon + \alpha = 0$) wird in Ziff. 2 anschaulich abgeleitet (ϵ = Distorsionstensor, α = Tensor der Versetzungsdichte). Die punktförmigen Gitterfehlstellen lassen sich als infinitesimale Versetzungsschleifen oder (äquivalent) als Kräftedipole, -Quadrupole usw. mit bestimmter elastischer Polarisierbarkeit beschreiben (Ziff. 3). Für ihre Wechselwirkung mit den elastischen Feldern des Kristalls gelten einfache Formeln (Ziff. 4). In Ziff. 5 folgen einige Anwendungen.

Unter Eigenspannungen im eigentlichen Sinn versteht man solche Spannungen, denen ein Körper unterliegen kann, der von keinerlei äußeren Kräften (oder Momenten), aber auch sonst von keinen spannungserzeugenden äußeren Einflüssen, wie z. B. Temperaturfeldern, elektrischen und magnetischen Feldern usw., beansprucht wird. Vom Standpunkt der Kontinuumsmechanik empfiehlt sich eine Unterteilung der Eigenspannungen, die davon ausgeht, daß es keine in aller kleinsten Bereichen völlig stetige Verteilung von Eigenspannungsquellen gibt, daß man vielmehr gewisse (später noch genauer zu definierende) elementare Eigenspannungsquellen anzunehmen hat, die mehr oder weniger dicht beieinander liegen können. Die Eigenspannungsquellen

können dann so angeordnet sein, daß es sinnvoll ist, über sie zu mitteln und sie als eine stetig variable räumliche Dichte α im ganzen Versuchskörper zu beschreiben. Es ergeben sich dann auch die (mittleren) Spannungen als stetige Ortsfunktion. Die beim Zerschneideversuch, also makroskopisch feststellbaren Spannungen sind von dieser Art.

Sind andererseits die dicht beieinander liegenden elementaren Eigenspannungsquellen im Mittel von entgegengesetztem Vorzeichen, so ergibt sich keine resultierende Dichte α . Von mittleren Spannungen kann dann ebenfalls nicht gesprochen werden, vielmehr werden hier die Spannungen in Bereichen von der Größenordnung des mittleren Abstandes der Eigenspannungsquellen ihr Vorzeichen umkehren. Solche Spannungen können röntgenographisch, aber nicht mehr direkt makroskopisch nachgewiesen wer-

* Dissertation, Stuttgart 1956.